Лекція № 24

На минулій лекції ввели поняття «класичний радіус електрона»

$$R_e \sim \frac{e^2}{m_e c^2} \approx 2.8 \cdot 10^{-13} см.$$

обговорили, що закони класичної електродинаміки перестають діяти на значно більших відстанях, коли проявляються квантові ефекти та оцінили «квантовий радіус електрона»

$$R_{quant.} \sim \frac{\hbar}{mc} = 137 R_e = 3.9 \cdot 10^{-11} см.$$

$R_{quant.} = \Lambda$ називають комптонівською довжиною хвилі.

Повернемось до формули (6.52). Потенціал системи точкових зарядів в точці розташування заряду e_a

$$\varphi_a = \sum_{b=1}^{N} \frac{e_b}{R_{ab}}.$$

Тут R_{ab} – відстань між точками розташування зарядів $R_{ab} = |\vec{r}_a - \vec{r}_b|$.

Відставляємо цей вираз в (6.52):

$$w = \frac{1}{2}\sum_{a,b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} = \frac{1}{2}\sum_{a} \frac{e_a^2}{R_{aa}} + \frac{1}{2}\sum_{a \neq b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} \tag{6.55}$$

Для точок $b = a$ $R_{aa} = 0$. Енергія (6.52) чи (6.55) складається із двох частин:

1. Суми власних енергії точкових зарядів, яка не залежить від їх взаємного розташування

$$\frac{1}{2}\sum_{a} \frac{e_a^2}{R_{aa}};$$

Кожен з членів суми розходиться, оскільки кулонівська енергія стає нескінченною при $R_{aa} \to 0$. Очевидна безглуздість цього результату означає, що класична електродинаміка стає незастосовною на малих відстанях. Труднощі із розбіжністю власної енергії точкового заряду є фундаментальною та проявляються не тільки у класичній електродинаміці, але й в сучасній теорії елементарних частинок. Щоб запобігти розбіжності власної енергії, доводиться вважати елементарні частинки не точковими. Тобто не елементарними, а такими, що мають внутрішню структуру, «неелементарність». Надалі ми власну нескінченну енергію, яку в рамках класичної електродинаміки розрахувати не є можливим, із повної енергії віднімаємо. Враховуємо тільки енергію взаємодії різних зарядів – другу суму в (6.52) чи (6.55).

2. енергії взаємодії різних зарядів $b \neq a$, яка залежить від їх взаємного розташування

$$\frac{1}{2}\sum_{a \neq b}\frac{e_a e_b}{R_{ab}}$$

Надалі розглядатимемо тільки енергію взаємодії зарядів – другу суму в (6.52) чи (6.55).

6.7.2. Енергія взаємодії точкових зарядів

Енергія взаємодії системи точкових зарядів визначається формулою

$$U = \frac{1}{2}\sum_{a \neq b}\frac{e_a e_b}{R_{ab}}. \tag{6.56}$$

Тут R_{ab} – відстань між зарядами *a* та *b*. Цю ж формулу можна написати без 1/2, якщо додати в подвійній сумі умову $a < b$

$$U = \sum_{a < b}\frac{e_a e_b}{R_{ab}}. \tag{6.57}$$

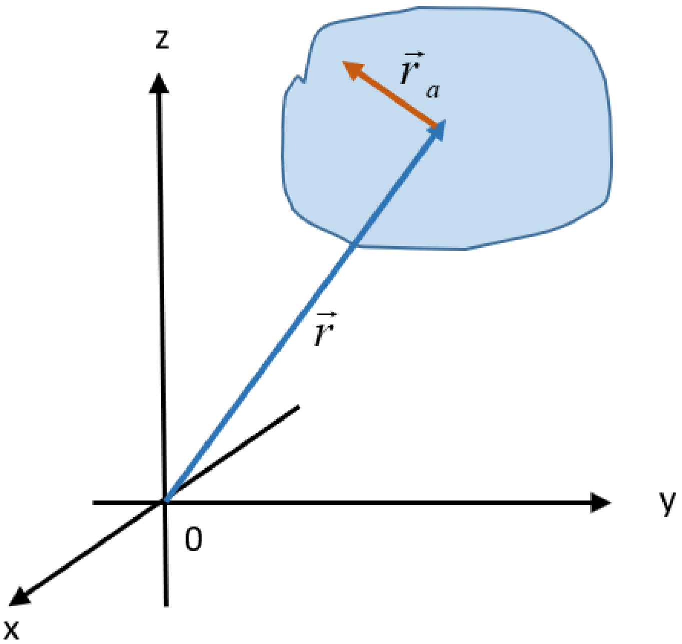
Енергію взаємодії двох точкових зарядів отримуємо з формули (6.56):

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{e_1 e_2}{R_{12}} + \frac{e_2 e_1}{R_{21}}\right) = \frac{e_1 e_2}{R_{12}};$$

$$U = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}. \tag{6.58}$$

6.8. Енергія взаємодії системи зарядів із зовнішнім полем

Нехай система нерухомих зарядів скінченного розміру знаходиться у зовнішньому полі, яке повільно змінюється в межах розташування системи зарядів. Координати виберемо так, як показано на рис.



Потенціальна енергія заряду e_a у зовнішньому полі є $e_a\varphi(\vec{r}+\vec{r}_a)$. Потенціальна енергія системи зарядів в полі

$$U=\sum_a e_a\varphi(\vec{r}+\vec{r}_a) \tag{6.59}$$

Врахуємо, що потенціал зовнішнього поля повільно змінюється в межах системи зарядів та розкладемо $\varphi(\vec{R}+\vec{r}_a)$ у тривимірний ряд Тейлора:

$$\varphi(\vec{r}+\vec{r}_a)\approx\varphi(\vec{r})+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{\vec{r}_a=0}x_a+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{\vec{r}_a=0}y_a+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{\vec{r}_a=0}z_a=$$

$$=\varphi(\vec{r})+\left(x_a\frac{\partial}{\partial x}+y_a\frac{\partial}{\partial y}+z_a\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi=\varphi(\vec{r})+(\vec{r}_a,\nabla)\varphi=\varphi(\vec{r})+(\vec{r}_a,\nabla\varphi).$$

Наближена формула для енергії взаємодії

$$U\approx\sum_a e_a\left(\varphi(\vec{r})+\vec{r}_a\nabla\varphi\right)=\sum_a e_a\left(\varphi(\vec{r})-\vec{r}_a\vec{E}\right)=\sum_a e_a\varphi(\vec{r})-\left(\sum_a e_a\vec{r}_a\right)\vec{E}$$

Складається із нульового наближення

$$U^{(0)}=\varphi(\vec{r})\sum_a e_a=q\varphi(\vec{r}). \tag{6.60}$$

Це енергія точкового заряду $q=\sum_a e_a$ в зовнішньому полі.

Наступне (перше) наближення

$$U^{(1)} = -\left(\sum_a e_a \vec{r}_a\right)\vec{E} = -\vec{d}\vec{E} \tag{6.61}$$

Тут $\vec{d} = \sum_a e_a \vec{r}_a$ – дипольний момент системи зарядів. Це наближення називають дипольним наближенням. Для нейтральної системи зарядів $q = \sum_a e_a = 0$ розклад (6.59) починається із дипольного члена (6.61). Це буде енергія диполя у зовнішньому полі.

Розрахуємо в тому ж наближенні силу, яка діє на систему зарядів за формулою

$$\vec{F} = -\nabla U = -\nabla\left(\sum_a e_a \varphi(\vec{r}) - \left(\vec{d},\vec{E}\right)\right) = \sum_a e_a\left(-\nabla\varphi(\vec{r})\right) + \nabla\left(\vec{d},\vec{E}\right) =$$
$$= \sum_a e_a \vec{E} + \nabla\left(\vec{d},\vec{E}\right).$$

Нульове наближення

$$\vec{F}_0 = q\vec{E}$$

Відповідає силі взаємодії точкового заряду із зовнішнім полем.

Наступне дипольне наближення

$$\vec{F}_1 = \nabla\left(\vec{d},\vec{E}\right)$$

Розрахуємо градієнт скалярного добутку двох векторів з урахуванням того, що $\vec{d}$ є сталим вектором, а $\vec{E}$ – це вектор напруженості електростатичного поля, який задовольняє рівнянням Максвелла. Маємо

$$\nabla\left(\vec{d},\vec{E}\right) = \left[\vec{d},\cancel{\left[\nabla,\vec{E}\right]}\right] + \left(\vec{d},\nabla\right)\vec{E} = \left(\vec{d},\nabla\right)\vec{E};$$
$$\left[\nabla,\vec{E}\right] = \mathrm{rot}\vec{E} = 0.$$

Отримали силу, яка діє на диполь у зовнішньому полі

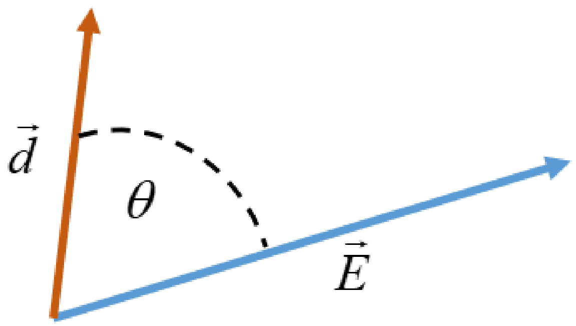
$$\vec{F}_1 = \left(\vec{d},\nabla\right)\vec{E}. \tag{6.62}$$

Сила (6.62) відповідає за поступальний рух диполю у зовнішньому полі.

На диполь діє також момент сили. Потенціальна енергія диполя у зовнішньому полі (6.61) може бути записана так

$$U = -dE\cos\theta. \tag{6.63}$$

Тут θ – кут між напрямком поля $\vec{E}$ та напрямком дипольного моменту диполя. Енергія (6.63) мінімальна при $\theta = 0$, тобто коли диполь орієнтований по полю.



Згідно з відомими формулами класичної механіки:

$$\vec{K} = \sum_a \left[\vec{r}_a, \vec{F}_a\right] = \sum_a \left[\vec{r}_a, e_a\vec{E}\right] = \sum_a \left[e_a\vec{r}_a, \vec{E}\right] = \left[\sum_a e_a\vec{r}_a, \vec{E}\right] =$$

$$= \left[\vec{d}, \vec{E}\right];$$

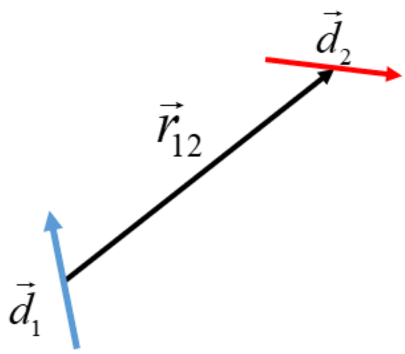
$$\vec{K} = \left[\vec{d}, \vec{E}\right]. \tag{6.64}$$

Можна розрахувати момент сил інакше, скориставшись формулою для енергії диполю у зовнішньому полі у(6.63) вигляді

$$K_z = -\frac{\partial U}{\partial \theta} = -dE\sin\theta.$$

Момент сили дорівнює нулю при $\theta = 0$. Момент сил, що діє на диполь, здійснює обертальний рух диполю. Повертає диполь по полю.

6.8.1. Енергія взаємодії двох точкових диполів



Нехай точковий диполь із дипольним моментом $\vec{d}_1$ знаходиться точці з радіус-вектором $\vec{r}_1$. Диполь із дипольним моментом $\vec{d}_2$ розташований в точці $\vec{r}_2$. Перший диполь створює в точці, де знаходиться другий диполь, поле, яке визначається так

$$\varphi_1 = \frac{(\vec{d}_1, \vec{r}_{12})}{r_{12}^3}; \quad \vec{E}_1 = -\nabla \varphi_1 = \frac{3(\vec{d}_1, \vec{r}_{12})\vec{r}_{12} - \vec{d}_1 r_{12}^2}{r_{12}^5}.$$

Згідно з (6.61) енергія диполя $\vec{d}_2$ в полі диполя $\vec{d}_1$ є такою

$$U_{d-d} = -\vec{d}_2 \vec{E}_1 = -\left(\vec{d}_2, \frac{3(\vec{d}_1, \vec{r}_{12})\vec{r}_{12} - \vec{d}_1 r_{12}^2}{r_{12}^5} \right) =$$

$$= \frac{(\vec{d}_1, \vec{d}_2) r_{12}^2 - 3(\vec{d}_1, \vec{r}_{12})(\vec{d}_2, \vec{r}_{12})}{r_{12}^5}.$$

Отримали формулу для енергії взаємодії двох диполів

$$U_{d-d} = \frac{(\vec{d}_1, \vec{d}_2) r_{12}^2 - 3(\vec{d}_1, \vec{r}_{12})(\vec{d}_2, \vec{r}_{12})}{r_{12}^5}. \tag{6.65}$$

Формула (6.65) є симетричною по $\vec{d}_1, \vec{d}_2$. Можна ввести одиничний вектор, направлений від диполя 1 до диполя 2 та написати формулу (6.65) так

$$U_{d-d} = \frac{(\vec{d}_1, \vec{d}_2) - 3(\vec{d}_1, \vec{n}_{12})(\vec{d}_2, \vec{n}_{12})}{r_{12}^3}. \tag{6.66}$$

Тут $\vec{n}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$ – одиничний вектор напрямку $\vec{r}_{12}$. Енергія (6.66) згасає, як $\frac{1}{r_{12}^3}$.

7. ПОСТІЙНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ В ВАКУУМІ

7.1. Рівняння магнітостатики

Розглянемо магнітне поле, яке створюють заряди, що рухаються у обмеженій області простору. Імпульси зарядів вважаємо скінченними. Такий рух називається стаціонарним.

Будемо розглядати середнє по часу поле, що створюють такі рухомі заряди. Усереднене магнітне поле є функцією тільки координат $\overline{\vec{H}(\vec{r})}$. Рівняння Максвелла для усередненої напруженості $\overline{\vec{H}(\vec{r})}$:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\overline{\vec{H}(\vec{r})} = 0; \\ \operatorname{rot}\overline{\vec{H}(\vec{r})} = \dfrac{4\pi}{c}\overline{\vec{j}} + \dfrac{1}{c}\underbrace{\overline{\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}}}_{=0}; \end{cases}$$

Усереднена похідна по часу від напруженості електричного поля звертається до нуля. Це твердження є наслідком теореми, що стверджує наступне: якщо функція $f(t)$ є скінченною, то $\overline{\left(\dfrac{df}{dt}\right)} = 0.$ Згідно з визначенням середнього значення

$$\overline{\left(\frac{df(t)}{dt}\right)} = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \frac{df}{dt}dt\right) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{f(T)-f(0)}{T}\right) = 0. \tag{7.1}$$

Отримали рівняння магнітностатики

$$\begin{cases} \operatorname{div}\overline{\vec{H}} = 0; \\ \operatorname{rot}\overline{\vec{H}} = \dfrac{4\pi}{c}\overline{\vec{j}}; \end{cases} \tag{7.2}$$

Введемо векторний потенціал

$$\overline{\vec{H}} = \operatorname{rot}\overline{\vec{A}}. \tag{7.3}$$

Дивергентне рівняння в (7.2) для напруженості магнітного поля, визначеної через векторний потенціал виконано автоматично

$$\operatorname{div}\overline{\vec{H}} = \left(\nabla, \overline{\vec{H}}\right) = \left(\nabla, \left[\overline{\nabla, \vec{A}}\right]\right) = 0.$$

Роторне рівняння в (7.2) для векторного потенціалу за додаткової умови

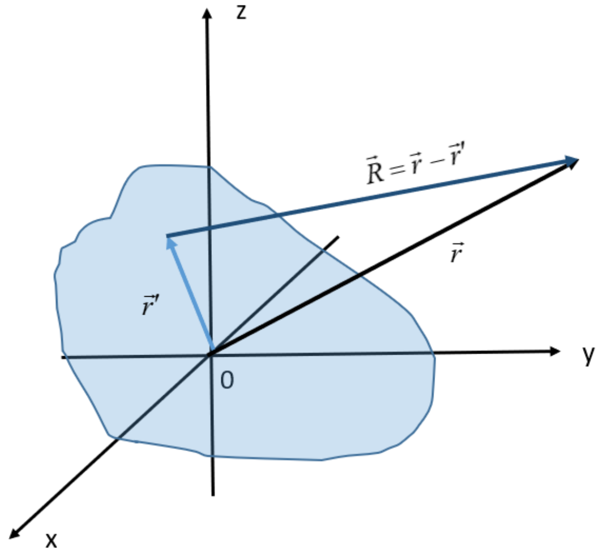
$$\operatorname{div}\overline{\vec{A}} = 0 \tag{7.4}$$

$$\operatorname{rot}\overline{\vec{H}} = \left[\nabla, \overline{\vec{H}}\right] = \left[\nabla, \left[\nabla, \overline{\vec{A}}\right]\right] = \nabla\underbrace{\left(\nabla, \overline{\vec{A}}\right)}_{\operatorname{div}\overline{\vec{A}}=0} - (\nabla,\nabla)\overline{\vec{A}} = -\nabla^2\overline{\vec{A}} = -\Delta\overline{\vec{A}}.$$

є векторним рівнянням Пуассона:

$$\Delta\overline{\vec{A}} = -\frac{4\pi}{c}\overline{\vec{j}}. \tag{7.5}$$

Аналогічно тому, як було знайдено розв’язок рівняння Пуассона (6.31) для електростатичного потенціалу, шукаємо розв’язок рівняння (7.5) для векторного потенціалу. Пишемо відразу відповідь, замінивши в (6.31) $\rho \to \dfrac{1}{c}\overline{\vec{j}}$



$$\overline{\vec{A}} = \frac{1}{c}\iiint_V \frac{\overline{\vec{j}(\vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \tag{7.6}$$